Санкт-Петербургский государственный университет

БАСКОВ Игорь Сергеевич

Выпускная квалификационная работа

Исследование некоторых вопросов теории гомотопий

Уровень образования: Специалитет
Направление 01.05.01 ``Фундаментальные математика и механика``
Образовательная программа СМ.5007. ``Фундаментальные математика и механика``
Профиль: Алгебра и теория чисел

Научный руководитель: старший преподаватель математики математико-механического факультета, доктор ф.м. наук, Амрани И. М.

Рецензент: научный сотрудник, Институт Проблем Региональной Экономики РАН, кандидат ф.м. наук, Гаврилович М. Р.

Санкт-Петербург
2019

Saint Petersburg State University

BASKOV Igor Sergeevich

Qualification Research Paper

The research of some problems in homotopy theory

Education level: Specialitet
Specialty 01.05.01 ``Fundamental Mathematics and Mechanics``
Educational program CM.5007. ``Fundamental Mathematics and Mechanics``
Department: Algebra and number theory

Advisor: Senior Lecturer of mathematics at Mathematics and Mechanics Faculty, doctor of physical and mathematical sciences,
Amrani I. M.

Reviewer: Research Fellow at Institute for Problems of Regional Economics, St.Petersburg, Doctor of Philosophy University of Oxford, Gavrilovich M. R.

Saint Petersburg
2019

Содержание

1. Введение

В дипломе мы изучаем гомологии топологической группы G^r, полученной как пушаут в категории топологических групп диаграммы $\mathbb{R} \leftarrow \mathbb{R}^\delta \hookrightarrow G$, где $\mathbb{R}^\delta$ (вещественные числа с дискретной топологией) является топологической подгруппой G. Идейно это означает, что дискретная подгруппа $\mathbb{R}^\delta$ сглаживается до $\mathbb{R}$. Если предположить, что группа G стягиваема, то гипотеза состоит в том, что $H_*(G^r, \mathbb{F}_p) \cong H_*(pt, \mathbb{F}_p)$.

В этом дипломе я описываю три подхода к данной гипотезе, позволяющие доказать частные случаи данной гипотезы.

Сперва, мы рассмотрим подход через модельные категории, в котором покажем, что если $\mathbb{R}^\delta \hookrightarrow G$ - корасслоение, то гипотеза выполнена. Для этого подхода мы в главе "Модельные категории"введем основные понятия теории модельных категорий: определения модельной структуры, трансфера модельной структуры и левой собственной категории. Также приведена теорема о том, что модельная категория топологических групп является левой собственной (со ссылкой на доказательство для топологических моноидов).

Во втором подходе мы опишем, как данная гипотеза следует из рациональности пространства G^r и опишем достаточное условие для пространства G^r быть рациональным. В главе "Рациональная теория гомотопий"мы сформулируем и докажем теорему Серра.

В третьем подходе мы явно опишем топологическую группу G^r как копредел пространств F^i, определение и основные свойства которых мы описываем в главе "Пространства F^i". Основным результатом данного подхода является доказательство гипотезы в случае нормального вложения $\mathbb{R}^\delta \hookrightarrow G$ (и даже более общего случая).

Важность данной гипотезы состоит в том, что она тесно связана с гипотезой Милнора, предложенной Фрейдлейнерем. Точнее, пусть H - группа Ли и H^δ - та же группа с дискретной топологией, тогда Милнор предположил, что естественное отображение $H_*(BH^\delta, \mathbb{F}_p) \to H_*(BH, \mathbb{F}_p)$ является изоморфизмом для простых p. Сам Милнор доказал данную гипотезу для разрешимых групп и однозначно делимых групп дискретных групп [14].

2. Общие конструкции

В данном разделе мы представим классические утверждения, которые потребуются далее. Утверждения, доказательства которых найти не просто (или доказательство которых достаточно просто) мы приводим, на остальные приводим ссылки на литературу.

2.1. Теория категорий

В данной работе нам понадобится ряд понятий теории категорий.

Определение 2.1. Категория $\mathscr{C}$ называется декартово замкнутой, если выполнены следующие условия условия

1 Категория $\mathscr{C}$ имеет терминальный объект.

2 Для любых двух объектов $X, Y \in \mathscr{C}$ существует $X \times Y \in \mathscr{C}$.

3 Функтор $- \times X$ для всех $X \in \mathscr{C}$ имеет правый сопряженный, обозначаемый за $\mathrm{Hom}(X, -)$

***Лемма* 2.1.** *Рассмотим функтор D из малой категории $\mathscr{D}$ в декартово замкнутую категорию $\mathscr{C}$ и объект $M \in \mathscr{C}$.*

Тогда $\varinjlim_{\lambda}(D(\lambda) \times M) \cong \varinjlim(D(\lambda)) \times M$

Доказательство. Функтор $- \times M$ является левым сопряженным к функтору $\mathrm{Hom}(M, -)$ по декартово замкнутости, и, так как левые сопряженные функторы коммутиуют с копределами, утверждение доказано. $\square$

***Следствие* 2.1.** *Пусть категория $\mathscr{C}$ декартово замкнута и диаграмма*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

в категории $\mathscr{C}$ является пушаутом.

Тогда, для любого $M \in \mathscr{C}$, диаграмма

$$\begin{tikzcd} X \times M \arrow[r] \arrow[d] & Y \times M \arrow[d] \\ Z \times M \arrow[r] & T \times M \end{tikzcd}$$

также является пушаутом в категории $\mathscr{C}$.

2.2. Теория групп

Определение 2.2. Действие группы G на топологическом пространстве X называется *собственным*, если для любой точки $x \in X$ существует открытая окрестность $x \in U \subset X$, такая что $\forall g \in G$ выполнено $g.U \cap U = \emptyset$.

Определение 2.3. Рассмотрим категорию Alg_R алгебр над коммутативным кольцом R и функтор $\mathsf{Alg}_R \to \mathsf{Ggp}$, сопоставляющий алгебре A ее группу единиц $A^{\times}$. Данный функтор допускает левый сопряженный функтор $\mathsf{Ggp} \to \mathsf{Alg}_R$, функтор *групповой алгебры*.

2.3. Топология

Обозначим через Top категорию, объектами которой являются топологические пространства, а морфизмfами являются непрерывные отображения.

Определение 2.4. Топологическое пространство X называется локально компактным, если для любой точки $x \in X$ существует окрестность $x \in U \subset K \subset X$, где K компактно.

Замечание 2.5. Дискретные пространства и $\mathbb{R}^n$ являются локально компактными.

Определение 2.6. Пусть G - топологическая группа, свободно и непрерывно действующая на слабо стягиваемом пространстве EG. Тогда пространство $BG := EG/G$ назовем *классифицирующим пространством* топологической группы G.

Замечание 2.7. Для каждой топологической группы G ассоциировано локально тривиальное расслоение $G \to EG \to BG$.

***Предложение* 2.1.** *Для произвольной топологической группы G существует единственное, с точностью до гомотопической эквивалентности, классифицирующее пространство BG.*

Доказательство. См. предложение 2.3. □

Определение 2.8. Для абелевой группппы A и натурального $n > 1$ за $K(A,n)$ обозначим простанство, такое что $\pi_n(K(A,n)) = A$ и $\pi_k(K(A,n)) = 0,\ k \neq n$.

Определение 2.9. Рассмотрим забывающий функтор $U : \mathsf{TGrp} \to \mathsf{Top}$. Тогда левый сопряженный функтор к U сопоставляет пространству X *свободную топологическую группу $F(X)$ над X.*

***Теорема* 2.10.** *Для любого топологического пространства X существует топологическая группа $F(X)$, свободная над X.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ - множество непрерывных отображений из X в топологические группы, такие что для любого непрерывного отображения g из X в некоторую топологическую группу G пропускается через некоторое отображение из $\mathscr{F}$. Определим $F(X) := \prod_{f \in \mathscr{F}} \mathsf{cod}(f)$ и отображение $i : X \to F(X)$ как $i(x)(f) := f(x)$. Ясно, что $F(X)$ является топологической группой и отображение i непрерывно. Универсальное свойство следует из построения. □

***Теорема* 2.11.** *[1]*

С каждым расслоением Серра $F \to E \to B$ ассоциирована длинная точная последовательность гомотопических групп

$$\cdots \to \pi_{n+1}(B) \to \pi_n(F) \to \pi_n(E) \to \pi_n(B) \to \pi_{n-1}(F) \to \dots$$

***Теорема* 2.12.** *[2]*

Пусть (X,Y) - $(n-1)$-связная пара связных топологических пространств и $k \in \mathbb{N}$. Тогда существует гомоморфизм $\pi_k(X,Y) \to H_k(X,Y)$, группы $H_i(X,Y)$ тривиальны для $i < n$ и $H_n(X,Y) \cong \pi_n(X,Y)/\pi_1(X,Y)$.

***Теорема* 2.13.** *(Формула Кюннета)[1]*

Для топологических пространств $X,Y \in \mathsf{Top}$ и поля $\mathbb{F}$ выполнено

$$H_*(X \times Y, \mathbb{F}) \cong H_*(X,\mathbb{F}) \otimes H_*(Y,\mathbb{F})$$

как градуированные абелевы группы.

Одним из важнейших понятий топологии является понятие геометрической реализации симплициального множества. Обозначим за Δ категорию, объектами которой являются наборы $[n] := 0 < 1 < \cdots < n-1$, а морфизмами являются упорядоченные отображения $f : [n] \to [m]$ (то есть если $i < j$, то $f(i) < f(j)$).

Определение 2.14.
- *Симплициальным множеством* называется функтор $\Delta^{op} \to \mathsf{Sets}$.
- За S обозначим категорию симплициальных множеств.
- *n-симплексом* Δ^n называется представимый функтор $\Delta^n = Hom_\Delta(-, [n])$.
- *Геометрической реализацией* симплициального множества X называется копредел
$$|X| := \varinjlim_{\Delta^n \to X} |\Delta^n|$$
в надкатегории $\Delta \downarrow X$, где за $|\Delta^n|$ обозначен стандартный геометрический симплекс.
- Для топологического пространства X за SX определим симплициальное множество непрерывных отображений $|\Delta^n| \to X$.

***Предложение* 2.2.** *Имеем пару сопяженных функторов* $|\cdot| : \mathsf{S} \leftrightarrows \mathsf{Top} : S$ *сопряжены:*

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(|X|, Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(X, SY)$$

В частности, функтор $|-|$ *коммутирует с копределами.*

Доказательство. Стандартный факт (теорема плотности [3]): предпучок на малой категории $\mathscr{C}$ является копределом представимых пучков. Тогда имеем

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(|X|, Y) \cong \varprojlim_{\mathrm{i}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{Top}}(|\Delta^n|, Y) \cong \varprojlim_{\mathrm{i}} \mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(\Delta^n, SY) \cong \mathrm{Hom}_{\mathsf{S}}(X, SY)$$

□

Определение 2.15. *Нервом* малой категории $\mathscr{C}$ называется симлициальное множество $N(\mathscr{C})_n := \mathrm{Hom}_{Cat}(\Delta[n], \mathscr{C})$, где категория $\Delta[n]$ состоит из одного объекта $0 < 1 < \cdots < n-1$ и упорядоченных отображений.

***Предложение* 2.3.** *Пусть G - топологическая группа и G - категория, состоящая из одного элемента и морфизмами g для каждого элемента $g \in G$. Тогда топологическое пространство $|N\mathsf{G}|$ является классифициующим постранством топологической группы G и любое классифицирующее пространство гомотопически эквивалентно $|N\mathsf{G}|$.*

Доказательство. Доказательство может быть найдено в [4]. □

2.4. Δ-порожденные пространства

В данном разделе мы определим категорию Δ-порожденных пространств. Основная причина перейти от категории Top к категории Top_Δ состоит в том, что Top не является хорошей теорией топологических пространств [5]. Мы докажем часть утверждений, на остальную часть утверждений дадим ссылки, так как доказательства в источнике [6] достаточно прозрачны.

Определение 2.16. Топологическое пространство X называется Δ-*порожденным*, если топология X совпадает с финальной топологией относительно всех непрерывных отображений $|\Delta^n| \to X$.

Определение 2.17. Обозначим за Top_Δ категорию Δ-порожденных пространств.

Пусть X - топологическое пространство. Обозначим за $[\Delta \downarrow X]$ категорию, объектами которой являются непрерывные отображения $|\Delta^n| \to X$ для $n \in \mathbb{N}$ с очевидными морфизмами. Имеется функтор $[\Delta \downarrow X] \to \mathsf{Top}$, такой что $[Y \to X] \mapsto Y$. Обозначим за $k_\Delta(X)$ копредел функтора $[\Delta \downarrow X] \to \mathsf{Top}$.

Замечание 2.18. Пространство $k_\Delta(X)$ как множество совпадает с X, но топология там богаче, чем топология на X. Более формально, отображение $k_\Delta(X) \xrightarrow{\mathrm{Id}} X$ непрерывно. Доказательство содержится в [6, Lemma 1.1].

***Предложение* 2.4.** *Копредел Δ-порожденных пространств Δ-порождено.*

Доказательство. Пусть $X_\lambda \in \mathsf{Top}_\Delta$ и $X := \varinjlim X_\lambda$. Очевидно, что если $S \subset X$ открыто, то для любого непрерывного отображения $f : \Delta^n \to X$ множество $f^{-1}(X)$ открыто.

Пусть теперь $S \subset X$ такое, что для $\forall n$ и любого $f : \Delta^n \to X$ множество $f^{-1}(S)$ открыто. Рассмотрим произвольное непрерывное отображение $g : \Delta^n \to X_\lambda$ для некоторых n и λ.

$$\begin{tikzcd} \Delta^n \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "f"'] & X_\lambda \arrow[d, "f_\lambda"] \\ & \varinjlim X_\lambda \end{tikzcd}$$

Множество $g^{-1}(f_\lambda^{-1}(S))$ открыто, и так как $X_\lambda \in \mathsf{Top}_\Delta$ множество $f_\lambda^{-1}(S)$ открыто. Из произвольности λ получаем, что S открыто в X. $\square$

***Следствие* 2.2.** *Пространство $k_\Delta(X)$ является Δ-порожденным.*

***Следствие* 2.3.** *Геометрическая реализация симплициального множества является Δ-порожденным пространством.*

Доказательство. По определению геометрическая реализация является копределом геометрических симплексов, которые по определению Δ-порождены. $\square$

***Предложение* 2.5.** *Пара функторов*

$$i : \mathsf{Top}_\Delta \rightleftarrows \mathsf{Top} : k_\Delta$$

сопряжены друг другу.

Доказательство. Доказательство содержится в [6, Corollary 1.4]. $\square$

Вообще говоря, произведение двух Δ-порожденных пространств не лежит в Top_Δ, также как и $C(X,Y)$ с компактно открытой топологией не обязано быть Δ-порожденным.

Определение 2.19. Для $X,Y \in \mathsf{Top}_\Delta$ определим за $X \otimes Y$ пространство $k_\Delta(X \times Y)$ и за $\mathsf{Hom}_\Delta(X,Y)$ пространство $k_\Delta((X,Y))$, где (X,Y) рассматривается с компактно-открытой топологией.

Замечание 2.20. Легко проверить, что $- \otimes -$ является категорным произведением в Top_Δ и $F_\Delta(-,-)$ является категорным пространством функций.

***Предложение* 2.6.** *Категория* Top_Δ *декартово замкнута. В частности, для любого* $Y \in \mathsf{Top}_\Delta$ *функтор* $-\otimes Y$ *коммутирует с копределами в* Top_Δ.

Доказательство. Доказательство содержится в [6, Theorem 3.6]. □

***Предложение* 2.7.** *Пусть* $X \in \mathsf{Top}_\Delta$ *и пространство* Y *локально компактно, тогда* $X \otimes Y \cong X \times Y$.

Доказательство. По определению $X \otimes Y = k_\Delta(X \times Y)$. Так как Y локально компактное, функтор $- \times Y$ коммутирует с копределами ([16, Corollary 2.4.4]), получаем

$$X \otimes Y = k_\Delta(X \times Y) = \varinjlim_{[\Delta \downarrow X]}(X \times Y) = \varinjlim_{[\Delta \downarrow X]}(X) \times Y = k_\Delta(X) \times Y = X \times Y$$

□

3. Модельные категории

3.1. Модельные категории

Понятие модельной категории несет своей целью закодировать гомотопическую информацию в свод формальных правил. В данном разделе мы напомним ключевые определения и нужные нам результаты.

Определение 3.1. *Модельной структурой* на категории $\mathscr{C}$ называется набор из трех подкатегорий C, F и W, удовлетворяющих следующим свойствам:

1 Если морфизм f лежит в C, F или W и g - ретракт f, то g принадлежит C, F или W соответственно.

2 Пусть для двух данных морфизмов f и g определена композиция fg. Тогда, если любые два из трех морфизмов f, g или fg лежат в W, то третий также лежит в W.

3 Пусть для следующей коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & E \\ \big\downarrow{\scriptstyle f} & & \big\downarrow{\scriptstyle g} \\ Y & \longrightarrow & B \end{array}$$

выполнено одно из условий

- $f \in C \cap W$ и $g \in F$
- $f \in C$ и $g \in F \cap W$

Тогда существует мофризм $h : Y \to E$, делающий следующую диаграмму коммутативной

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & E \arrow[d, "g"] \\ Y \arrow[r] \arrow[ur, "h"] & B \end{tikzcd}$$

4 Любой морфизм $f : X \to Y$ пропускается через некоторое пространство Z:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

так что $g \in C \cap W$ и $h \in F$.
Аналогично, любой морфизм $f : X \to Y$ пропускается через некоторое пространство Z:

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "g"'] & & Y \\ & Z \arrow[ur, "h"'] & \end{tikzcd}$$

так что $g \in C$ и $h \in F \cap W$.

5 Категория $\mathscr{C}$ полна и кополна.

Замечание 3.2. Морфизмы из C, F и W называются корасслоениями, расслоениями и слабыми эквивалентностями соответсвенно. Такие названия происходят из элементарной теории гомотопии, а именно: категория топологических пространств Top является модельной категорией, где модельную структуру можно ввести различными способами. Стандартная модельная структура на Top определяется следующим способом: морфизмы в F - это расслоения Серра, морфизмы в W - непрерывные отображения, индуцирующие изоморфизм на π_*, а морфизмы из C восстанавливаются из свойства 3. Аккуратное доказательство того, что вышеописанная структура является модельной можно в [7].

Определение 3.3. Объект X модельной категории $\mathscr{C}$ называется кофибрантным (фибрантным), если отображение $0 \to X$ ($X \to 0$) является корасслоением (расслоением).

Для дальнейших целей нам потребуется метод введения модельной структуры на некоторой категории $\mathscr{D}$. Для этого нам потребуется модельная категория $\mathscr{C}$, в некотором смысле тесно связанная с категорией $\mathscr{D}$. Тогда можно будет перенести модельную структуру с категории $\mathscr{C}$ на категорию $\mathscr{D}$.

Определение 3.4. Пусть даны две категории $\mathscr{C}$ и $\mathscr{D}$, где категория $\mathscr{C}$ модельна, и пара сопряженных функторов

$$U : \mathscr{C} \leftrightarrows \mathscr{D} : F$$

с U правым сопряженным.

Тогда *правым трансфером* модельной структуры с категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{D}$ называется определение классов расслоений, корасслоений и слабых эквивалентностей на категории $\mathscr{D}$ по правилу

- Расслоения и слабые эквивалентности в $\mathscr{D}$ определяются как образы при U расслоений и слабых эквивалентностей категории $\mathscr{C}$.

- Корасслоения в $\mathscr{D}$ определяются как морфизмы, имеющие поднятие относительно тривиальных расслоений.

Замечание 3.5. Вообще говоря, правый трансфер модельной структуры с категории $\mathscr{C}$ в категорию $\mathscr{D}$ не определяет модельной структуры на категории $\mathscr{D}$. Необходимые и достаточные условия того, что трансфер определяет модельную структуру на $\mathscr{D}$, можно найти в [8, Theorem 2.2].

***Предложение* 3.1** (19)**.** *Рассмотрим пару сопряженных функторов*

$$U : \mathsf{TGrp} \leftrightarrows \mathsf{Top} : F$$

где функтор U забывающий и функтор F сопоставляет топологическому пространству X свободную топологическую группу F(X).

Тогда правый трансфер модельной структуры с Top *определяет модельную структуру на* TGrp.

Определение 3.6. Рассмотрим диаграмму $X \leftarrow Y \rightarrow Z$ в модельной категории $\mathscr{C}$. Категория таких диаграмм является модельной, следовательно, можно рассмотреть кофибрантную замену (определение 3.1, 4) $X' \leftarrow Y' \rightarrow Z'$ диаграммы $X \leftarrow Y \rightarrow Z$. Тогда *гомотопическим пушаутом* диаграммы $X \leftarrow Y \rightarrow Z$ называется пушаут диаграммы $X' \leftarrow Y' \rightarrow Z'$.

Для нас главным результатом о классифицирующих пространствах является следующее предложение.

***Предложение* 3.2.** *Классифицирующее пространство коммутирует с гомотопическими пушаутами топологических моноидов с точностью до гомотопической эквивалентности.*

Доказательство. Доказательству данного факта посвящена статья [17]. □

***Теорема* 3.7.** *Пусть диаграмма топологических пространств*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r] \arrow[d] & Y \arrow[d] \\ Z \arrow[r] & T \end{tikzcd}$$

является гомотопическим пушаутом.

Тогда имеем длинную точную последовательность

$$\cdots \to H_{n+1}(T) \to H_n(X) \to H_n(Y) \oplus H_n(Z) \to H_n(T) \to \dots$$

Доказательство. Это классический результат, доказательство которого, например, может быть найдено в [9]. □

4. Гомологии и когомологии

В этой главе мы дадим краткое введение в теорию гомологий.

4.1. Гомологии комплексов

Определение 4.1. *(ко)Гомологическим комплексом* (далее просто комплекс) C_* называется набор абелевых групп $\{C_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ и гомоморфизмов $\partial_k : C_k \to C_{k-1}$, таких что $\partial^2 = 0$.

Определение 4.2. Комплекс C^* называется *точным*, если $\operatorname{Ker} \partial_{k-1} = \operatorname{Im} \partial_k$ для всех k.

Определение 4.3. k-ая группа гомологий H_k комплекса C^* определяется как фактор-группа $\operatorname{Ker} \partial_{k-1}/\operatorname{Im} \partial_k$.

Для топологического пространства X также можно определить группы гомологий. Определим $C_k(X)$ как свободную абелеву группу на образующих $\{\Delta^k \to X\}$. Отображение ∂_k определяется как линейное отображение, которое на образующих действует следующим образом

$$\partial_k(f : \Delta^k \to X) = \sum (-1)^i f|_{\Delta_i^k}$$

где Δ_i^k - i-ая грань симплекса Δ^k. Тогда $H_*(X) := H_*(C_*(X))$

***Теорема* 4.4.** *Отображение $X \to H_*(X)$ является функториальным из категории топологических пространств в категорию комплексов.*

4.2. Гомологии групп

Пусть G - дискретная группа, которой мы сопоставим групповую алгебру $\mathbb{Z}G$. Для продолжения нам понадобится важная лемма.

***Лемма* 4.1.** *Каждый G-модуль M имеет свободну резольвенту $\mathbb{Z}G$-модулей.*

Доказательство. Рассмотрим накрытие $F_0 \to M$ модуля M свободным модулем F_0. У накрытия $F_0 \to M$ ядро накроем свободным модулем F_1. Таким образом получаем точную последовательность $F_1 \to F_0 \to M$. Ядро $F_1 \to F_0$ накроем свободным модулем F_2. Продолжая данную процедуру получим точную бесконечную последовательность свободных $\mathbb{Z}G$-модулей

$$F_\bullet := \cdots \to F_2 \to F_1 \to F_0 \to M$$

□

Рассмотрим функтор $- \otimes_{\mathbb{Z}G} M$ для $\mathbb{Z}G$-модуля M. Данный функтор точен справа, но не слева, таким образом можно зафиксировать его производные функторы, которые мы назовем гомологиями группы G с коэффициентами в M. Более точно:

Определение 4.5. Определим абелевы группы $H_*(G,M) := H_*(F_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}G} M)$, где $F_\bullet$ - некоторая проективная $\mathbb{Z}G$-резольвента тривиального G-модуля $\mathbb{Z}$.

Следующее утверждение показывает корректность данного определения.

***Предложение* 4.1.** *Пусть $F_\bullet$ и $F'_\bullet$ - две различные проективные $\mathbb{Z}G$-резольвенты тривиального G-модуля $\mathbb{Z}$.*

Тогда $H_*(F_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}G} M) \cong H_*(F'_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}G} M)$ для любого $\mathbb{Z}G$-модуля M.

Для доказательства этого утверждения нам потребуется две леммы.

***Лемма* 4.2.** *Пусть $\varphi : M \to N$ гомоморфизм модулей, $F_\bullet^M \to M$ и $F_\bullet^N \to N$ - проективные резольвенты.*

Тогда гомоморфизм продолжается до гомоморфизма проективных резольвент $\varphi_\bullet : (F_\bullet^M \to M) \to (F_\bullet^N \to N)$.

Доказательство. Доказательство будем проводить по индукции. Отображение $\varphi_0 := \varphi : M \to N$ имеется из условия. Пусть теперь отображение φ_n уже построено, тогда рассмотрим следующую диаграмму.

$$
\begin{tikzcd}
F^M_{n+1} \arrow[rr, "d_{n+1}"] \arrow[dr] \arrow[ddr] & & F^M_n \arrow[r, "d_n"] \arrow[ddd, "\varphi_n"] & F^M_{n-1} \arrow[ddd, "\varphi_{n-1}"] \\
& \operatorname{Ker} d^M_n \arrow[ur, hook] \arrow[d, "\varphi_n"] & & \\
& \operatorname{Ker} d^N_n \arrow[dr, hook] & & \\
F^N_{n+1} \arrow[rr, "d_{n+1}"] \arrow[ur] & & F^N_n \arrow[r, "d_n"] & F^N_{n-1}
\end{tikzcd}
$$

Пусть $x \in \operatorname{Ker} d^M_n$, тогда $d_n(\varphi_n(x)) = \varphi_{n-1}(d_n(x)) = 0$. Таким образом, отображение φ_n при сужении на $\operatorname{Ker} d^M_n$ действует в $\operatorname{Ker} d^N_n$. В композиции с отображением $F^M_{n+1} \to \operatorname{Ker} d^M_n$ имеем отображение $F^M_{n+1} \to \operatorname{Ker} d^N_n$.

$$
\begin{tikzcd}
& F^N_{n+1} \arrow[d] \\
F^M_{n+1} \arrow[r] & \operatorname{Ker} d^N_n
\end{tikzcd}
$$

Так как $F^N_{n+1} \to \operatorname{Ker} d^N_n$ - эпиморфизм, а F^M_{n+1} - проективный модуль, существует поднятие $\varphi_{n+1} : F^M_{n+1} \to F^N_{n+1}$. $\square$

***Лемма* 4.3.** *Пусть $\varphi : M \to N$ гомоморфизм модулей, $\varphi^1_\bullet, \varphi^2_\bullet : (F^M_\bullet \to M) \rightrightarrows (F^N_\bullet \to N)$ - морфизмы проективных резольвент, продолжающие φ.*

Тогда $\varphi^1_\bullet$ и $\varphi^2_\bullet$ гомотопны.

Доказательство. Доказательство этого классического результата можно найти в [10]. $\square$

Доказательство. 4.1

По лемме 4.2 существуют морфизмы резольвент $f : F_\bullet \to F'_\bullet$ и $f' : F'_\bullet \to F_\bullet$, продолжающие $Id : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$. По лемме 4.3 существует гомотопия h между $f \circ f'$ и Id. Тогда $f \circ f' - Id = d \circ h + h \circ d$ индуцирует следующее равенство на гомологиях:

$$f_* \circ f'_* - Id_* = d_* \circ h_* + h_* \circ d_*$$

Пусть α - гомологический класс. Тогда $(d_* \circ h_* + h_* \circ d_*)(\alpha) = 0$, таким образом $f_* \circ f'_* = Id$. Аналогичными рассуждениями доказывается $f'_* \circ f_* = Id$. $\square$

Приведем главное утверждение, связывающее гомологии групп с гомологиями пространств.

***Теорема* 4.6** (1)**.** *Пусть G - дискретная группа и $K(G,1)$ - пространство Эйленберга-Макклейна группы G.*

Тогда $H_*(G) \cong H_*(K(G,1))$.

5. Спектральные последовательности

Подробное введение в теорию спектральных последовательностей можно найти в [11]. В данной главе мы определим две главные спектральные последовательности, которыми будем пользоваться позже.

***Теорема* 5.1.** *Спектральная последовательность Серра*

Пусть $F \to E \to B$ - расслоение Серра и B - связное пространство.

Тогда существует спектральная последовательность в первом квадранте $\{E^r, d^r\}_{r\geq 2}$, второй лист которой равен $E^2_{p,q} = H_p(B, H_q(F))$, которая сходится к $H_{p+q}(E)$.

Доказательство. Доказательство содержится в [12]. □

***Теорема* 5.2.** *Cartan - Leray [11, Theorem 8.9]*

Пусть дискретная группа G действует на связном пространстве X свободно и собственно.

Тогда существует спектральная последовательность $E^2_{p,q} = H_p(G, H_q(X)) \Rightarrow H_{p+q}(X/G)$.

Доказательство. Пусть A - абелева группа, тогда комплекс $C_*(X/G, A)$ изоморфен инвариантам комплекса $C_*(X, A)$ при действии G:

$$C_*(X/G, A) \cong C_*(X, A)_G$$

Построим свободную $\mathbb{Z}G$ резольвенту тривиального G-модуля $\mathbb{Z}$: $F_\bullet \to \mathbb{Z} \to 0$. Построим двойной комплекс

$$F_{p,q} = F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q(X), \;\; d := d_F \otimes 1 + (-1)^q 1 \otimes d_X$$

Фильтруем F построчно и получаем комплекс $E^0_{\bullet,q} = F_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q(X)$. По определению гомологий групп, гомологии комплекса $F_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q(X)$ равны гомологиям группы G с коэффициентами в $C_q(X)$

$$H_*(F_\bullet \otimes_{\mathbb{Z}G} C_q(X)) = H_*(G, C_q(X))$$

Теперь, модули $C_q(X)$ свободны как $\mathbb{Z}G$-модули, следовательно они плоские и мы получаем, что первый лист E^1 сконцентрирован в 0-ом столбце. В 0-ом столбце получаем $H_0(G, C_q(X)) \cong (C_q(X))_G \cong C_q(X/G)$, тогда спектральная последовательность сходится к $H_*(X/G)$

Рассмотрим фильтрацию двойного комплекса $F_{p,q}$ по столбцам. Тогда $E^0_{p,*} = F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} C_*(X)$, $d^0 := 1 \otimes \partial_X$ и $E^1_{p,*} = F_p \otimes_{\mathbb{Z}G} H_*(X)$. Гомологии этого комплекса $E^2 = H_*(G, H_*(X))$.

Итого

$$E^2 = H_*(G, H_*(X)) \Rightarrow H_*(X/G)$$

□

6. Рациональная теория гомотопий

В данной главе мы определим основные понятия рациональной теории гомотопий, необходимые для одного из подходов к основной гипотезе. Также приведем доказательство важной теоремы Серра в рациональной теории гомотопий.

За $Vect_{\mathbb{Q}}$ обозначим $\mathbb{Q}$-векторные пространства.

***Теорема* 6.1.** *(Теорема Серра) Пусть X - односвязное топологическое пространство.*

Тогда следующие условия равносильны:

1 Группы $\pi_n(X)$ являются $\mathbb{Q}$-векторными пространствами для всех $n \geq 1$.

2 Группы $H_n(X,\mathbb{Z})$ являются $\mathbb{Q}$-векторными пространствами для всех $n \geq 1$.

Для доказательства данного утверждения нам понадобится ряд фактов, восходящих к Серру.

Определение 6.2. Пусть X - односвязное пространство. Тогда *башней Постникова* пространства X называется последовательность расслоений и совместимые отображения $X \to X_i$

$$\begin{tikzcd} & & X \arrow[dl] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\ \dots \arrow[r] & X_n \arrow[r] & \dots \arrow[r] & X_3 \arrow[r] & X_2 \end{tikzcd}$$

такая что

1 $\pi_i(X_j) = 0$ для $i > j$.

2 $\pi_i(X) \to \pi_i(X_j)$ является изоморфизмом для $i \leq j$.

***Лемма* 6.1.** *[14, Lemma 2]*

Пусть A - $\mathbb{Q}$-векторное пространство.

Тогда $H_n(K(A,1))$ являются $\mathbb{Q}$-векторными пространствами $n > 0$.

Доказательство. Пусть $\dim A = 1$, тогда A - предел свободных циклических групп, следовательно $H_i(BA,\mathbb{F}_p) = 0$ для $i \geq 2$. Для $i = 1$ получаем $H_1(BA,\mathbb{F}_p) \cong A \otimes \mathbb{F}_p = 0$. Пусть A - конечномерное $\mathbb{Q}$-векторное пространство, тогда $A \cong B^n$, где $\dim B = 1$, следователльно, по формуле Кюннета (2.13) $H_*(A,\mathbb{F}_p) \cong H_*(B,\mathbb{F}_p)^{\otimes n}$. Если $\dim A = \infty$, то при переходе к прямому пределу получаем доказательство леммы. □

Для любого односвязного пространства X существует башня Постникова, которая строится по индукции:

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[r] \arrow[d] & PathSpace(K(\pi_n(X),n+1)) \arrow[d] \\ X_{n-1} \arrow[r] & K(\pi_n(X),n+1) \end{tikzcd}$$

В данной диаграмме пространство X_n является пулбэком по отображению $\{X_{n-1} \to K(\pi_n(X),n+1)\} \in [X_{n-1},K(\pi_n(X),n+1)] = H^{n+1}(X_{n-1},\pi_n(X))$. Для подробного доказательства существования башни Постникова см [13].

Из длинной точной гомотопической последовательности получаем последовательность расслоений $K(\pi_n(X),n) \to X_n \to X_{n-1}$.

Доказательство. Сперва покажем, что $\mathbb{Q}$-векторные пространства удовлетворяют ряду условий.

1 Пусть $A \to B \to C \to D \to E$ - точная последовательность, где A,B,D,E являются $\mathbb{Q}$-векторными пространствами.

Тогда C само является $\mathbb{Q}$-векторным пространством.

Доказательство. Умножим точную последовательность на плоский модуль $\mathbb{Q}$ и получим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccccc} A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & B & \longrightarrow & C\otimes\mathbb{Q} & \longrightarrow & D & \longrightarrow & E \end{array}$$

По 5-лемме получаем, что $C \cong C \otimes \mathbb{Q}$. $\square$

2 Пусть A и B - $\mathbb{Q}$-векторные пространства, тогда $A \otimes B$ и $Tor_1^{\mathbb{Z}}(A,B)$ являются $\mathbb{Q}$-векторные пространства. Это очевидно, так как функторы $- \otimes -$ и $\mathrm{Tor}_1^{\mathbb{Z}}(-,-)$ аддитивны по двум переменным.

3 Пусть A - $\mathbb{Q}$-векторное пространство.

Тогда $H_n(K(A,m))$ являются $\mathbb{Q}$-векторными пространствами для всех $n,m > 0$.

Доказательство. Будем доказывать по индукции. База следует из 15 6.1. Пусть теперь для m группы $H_n(K(A,m),\mathbb{Z})$ являются $\mathbb{Q}$-векторными пространствами. Рассмотрим расслоение

$$K(A,m) \to PK(A,m+1) \to K(A,m+1)$$

где PX - пространство путей над X, и спектральную последовательность Серра для этого расслоения.

$$E^2_{i,j} = H_i(K(A,m+1), H_j(K(A,m),\mathbb{F}_p)) \Rightarrow H_{i+j}(PK(A,m+1),\mathbb{F}_p)$$

По индукционному предположению второй лист спектральной последовательности вырождается в следующий лист

3	$H_3(K(A,m+1),\mathbb{F}_p)$	0	0	0	...
2	$H_2(K(A,m+1),\mathbb{F}_p)$	0	0	0	...
1	$H_1(K(A,m+1),\mathbb{F}_p)$	0	0	0	...
0	$H_0(K(A,m+1),\mathbb{F}_p)$	0	0	0	...
	0	1	2	3	...

Откуда $H_*(K(A,m+1),\mathbb{F}_p) \cong H_*(pt,\mathbb{F}_p)$, что и требовалось доказать. $\square$

4 Пусть

$$0 = A_{-1} \subset A_0 \subset \cdots \subset A_{n-1} \subset A_n = A$$

- фильтрация абелевых групп, такая что все $A_i/A_{i-1} \in Vect_{\mathbb{Q}}$.

Тогда $A \in Vect_{\mathbb{Q}}$.

Доказательство. Будем доказывать по индукции. База очевидна. Пусть в фильтрации группы A элементы фильтрации $A_{n-1} \in Vect_{\mathbb{Q}}$. Тогда получаем точную последовательность $0 \to A_{n-1} \to A_n \to A_n/A_{n-1} \to 0$, где все элементы, кроме центрального, лежат в $Vect_{\mathbb{Q}}$. Тогда из свойства 1 получаем $A_n \in Vect_{\mathbb{Q}}$. $\square$

Перейдем к доказательству эквивалентности 1 и 2.

Для постранства X определим башню Постникова $\dots \to X_n \to \dots X_3 \to X_2$

Пусть сперва $\pi_n(X)$ являются $\mathbb{Q}$-векторными пространствами. Индукцией по k покажем, что $H_n(X_k,\mathbb{Z})$ являются $\mathbb{Q}$-векторными пространствами для всех $n>0$. База очевидна. Пусть теперь $H_n(X_i,\mathbb{Z})$ - $\mathbb{Q}$-векторное пространство для $i<k$. Рассмотрим расслоение $K(\pi_k(X),k) \to X_k \to X_{k-1}$ и спектральную последовательность Серра

$$E^2_{*,*} = H_*(X_{k-1}, H_*(K(\pi_k(X),k),\mathbb{Z})) \Rightarrow H_*(X_k,\mathbb{Z})$$

По свойствам 2 и 3, и по теореме об универсальных коэффициентах второй лист полностью состоит из $\mathbb{Q}$-векторных пространств. Тогда и листы $E^r_{*,*} = H_*(E^{r-1}_{*,*})$ состоят из $\mathbb{Q}$-векторных пространств для $r \geq 3$. Промежуточные факторы фильтрации для $H_*(X_k,\mathbb{Z})$ равны элементам стабильного листа $E^\infty \in Vect_{\mathbb{Q}}$. Тогда по свойству 4 группы $H_*(X_k,\mathbb{Z})$ являются $\mathbb{Q}$-векторными простанствами. Так как $H_k(X) \cong H_k(X_k)$ для $k \geq 2$.

Обратно, пусть $H_n(X,\mathbb{Z}) \in Vect_{\mathbb{Q}}$. Покажем индукцией по k, что $\pi_n(X_k) \in Vect_{\mathbb{Q}}$. Пусть $k=2$, тогда $X_2 = K(\pi_2(X),2)$. Имеем: $\pi_n(X_2)$ при $n=2$ из 6 2.12 равно $\pi_2(X) = H_2(X,\mathbb{Z}) \in Vect_{\mathbb{Q}}$ и при $n \neq 2$ равно $0 \in Vect_{\mathbb{Q}}$. Пусть теперь $\pi_n(X_{k-1}) \in Vect_{\mathbb{Q}}$, тогда $H_n(X_{k-1},\mathbb{Z})$ являются $\mathbb{Q}$-векторными пространствами для $n>0$. Преобразуем $X \to X_{k-1}$ во вложение (с помощью конуса). Из длинной точной последовательности гомотопических групп для пары (X_{k-1},X)

$$\dots \to 0 = \pi_{k+1}(X_{k-1}) \to \pi_{k+1}(X_{k-1},X) \to \pi_k(X) \to \pi_k(X_{k-1}) = 0 \to \dots$$

получаем $\pi_{k+1}(X_{k-1},X) \cong \pi_k(X)$. Из теоремы 6 2.12 имеем $\pi_{k+1}(X_{k-1},X) \cong H_{k+1}(X_{k-1},X)$. Из длинной точной последовательности гомологий для пары (X_{k-1},X)

$$H_{k+1}(X,\mathbb{Z}) \to H_{k+1}(X_{k-1},\mathbb{Z}) \to H_{k+1}(X_{k-1},X) \to H_k(X,\mathbb{Z}) \to H_k(X_{k-1},\mathbb{Z})$$

Все члены, кроме центрального, являются $\mathbb{Q}$-векторными пространствами, а тогда, по свойству 1, группа $H_{k+1}(X_{k-1},X) \cong \pi_{k+1}(X_{k-1},X) \cong \pi_k(X) \in Vect_{\mathbb{Q}}$. $\square$

7. Пространства F^i

В данной секции мы рассмотрим пространства F^i, которые можно сопоставить некоторым топологическим группам. На протяжении всего раздела мы будем работать в категории Top_Δ.

Для топологической группы $G \in \mathrm{Top}_\Delta$ через $\mathbb{R}^\delta \overset{i}{\bowtie} G$ определим топологическую группу $\mathbb{R}^\delta \otimes G \otimes \dots \otimes G$, где в этом произведении i копий группы G. Пространство $\mathbb{R}^\delta \overset{i}{\bowtie} G$ является Δ-порожденным по построению.

Пусть G - топологическая группа, являющаяся Δ-порожденным пространством и $\mathbb{R}^\delta \to G$ - вложение топологических групп.

Определение 7.1. Определим за F^i пушаут в категории Top диаграммы

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^\delta \overset{i}{\bowtie} G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "Id"] & G \arrow[d, dotted] \\ \mathbb{R} \overset{i}{\bowtie} G \arrow[r, dotted, "\tilde{\mu}"] & F^i \end{tikzcd}$$

По предложению 2.4 пространство $F^i \in \mathsf{Top}_\Delta$.
Имеются естественные отображения $F^i \to F^j$ для $i < j$:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^\delta \overset{j}{\bowtie} G \arrow[rrr, "\mu"] \arrow[ddd, "\mathrm{Id}"] & & & G \arrow[ddd] \\
& \mathbb{R}^\delta \overset{i}{\bowtie} G \arrow[ul, hook] \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & G \arrow[ur] \arrow[d] & \\
& \mathbb{R} \overset{i}{\bowtie} G \arrow[dl, hook] \arrow[r, "\tilde{\mu}"] & F^i \arrow[dr, dotted] & \\
\mathbb{R} \overset{j}{\bowtie} G \arrow[rrr, "\tilde{\mu}"] & & & F^j
\end{tikzcd}$$

Теорема 7.2. *Пространство $F^\infty = \varinjlim F^i$ является топологической группой.*

Доказательство. Определим отображения $F^i \otimes F^j \to F^{i+j}$. Чтобы определить данные отображения, нужно построить два отображения $F^i \otimes G \to F^{i+j}$ и $F^i \otimes \mathbb{R} \overset{j}{\bowtie} G \to F^{i+j}$, для которых следующая диаграмма (которая является пушаутом по предложению 2.1) коммутативна.

$$\begin{tikzcd}
F^i \otimes (\mathbb{R}^\delta \overset{j}{\bowtie} G) \arrow[r, "\mathrm{Id}\otimes\mu"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & F^i \otimes G \arrow[d] \\
F^i \otimes (\mathbb{R} \overset{j}{\bowtie} G) \arrow[r] & F^{i+j}
\end{tikzcd}$$

$\boxed{F^i \otimes G \to F^{i+j}}$: рассмотрим следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^\delta \overset{i}{\bowtie} G) \otimes G \arrow[r, "\mu\otimes\mathrm{Id}"] \arrow[d, "\mathrm{Id}"] & G \otimes G \arrow[r, "\mu"] \arrow[d, "Id"] & G \arrow[dd] \\
(\mathbb{R} \overset{i}{\bowtie} G) \otimes G \arrow[r, "\tilde{\mu}\otimes\mathrm{Id}"] \arrow[d, hook] & F^i \otimes G \arrow[dr, dotted] & \\
\mathbb{R} \overset{i+j}{\bowtie} G \arrow[rr, "\tilde{\mu}"] & & F^{i+j}
\end{tikzcd}$$

Большой квадрат, очевидно, коммутативен, и так как маленький квадрат является пушаутом, существует отображение $F^i \otimes G \to F^{i+j}$.

$\boxed{F^i \otimes (\mathbb{R} \overset{j}{\bowtie} G) \to F^{i+j}}$: Существует естественное отображение $(\mathbb{R} \overset{i+j}{\bowtie} G) \to F^{i+j}$. Рассмотрим следующую диаграмму

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^\delta \overset{i}{\bowtie} G) \otimes (\mathbb{R} \overset{j}{\bowtie} G) \arrow[rr, "\mu\otimes Id"] \arrow[dd, "\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}"] & & G \otimes (\mathbb{R} \overset{j}{\bowtie} G) \arrow[dl, hook] \arrow[dd, "comp"] \\
& (\mathbb{R} \overset{i+j}{\bowtie} G) \arrow[dr] & \\
(\mathbb{R} \overset{i}{\bowtie} G) \otimes (\mathbb{R} \overset{j}{\bowtie} G) \arrow[ur, "\mathrm{Id}"] \arrow[rr, "comp"] & & F^{i+j}
\end{tikzcd}$$

Большой квадрат, очевидно, коммутативен.

Теперь, следующий квадрат является пушаутом

$$\begin{tikzcd}
(\mathbb{R}^\delta \overset{i}{\bowtie} G) \otimes (\mathbb{R} \overset{j}{\bowtie} G) \arrow[r, "\mu\otimes Id"] \arrow[d, "\mathrm{Id}\otimes\mathrm{Id}"] & G \otimes (\mathbb{R} \overset{j}{\bowtie} G) \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
(\mathbb{R} \overset{i}{\bowtie} G) \otimes (\mathbb{R} \overset{j}{\bowtie} G) \arrow[r] \arrow[drr] & F^i \otimes (\mathbb{R} \overset{j}{\bowtie} G) \arrow[dr, dotted] & \\
 & & F^{i+j}
\end{tikzcd}$$

Тогда имеем отображение $F^i \otimes (\mathbb{R} \overset{j}{\bowtie} G) \to F^{i+j}$.

Наконец, имеем отображения $F^i \otimes F^j \to F^{i+j}$ и по конструкции они совпадают с произведением $G \otimes G \to G$. Теперь, перейдем к копределу и получим отображение $\varinjlim_j \varinjlim_i (F^i \otimes F^j) \to F^\infty$. Имеем, по предложению 2.4

$$\varinjlim_j (\varinjlim_i (F^i \otimes F^j)) = \varinjlim_j (\varinjlim_i (F^i)) \otimes F^j = \varinjlim_j (F^\infty \otimes F^j) = F^\infty \otimes \varinjlim_j (F^j) = F^\infty \otimes F^\infty$$

Так как отображение $F^\infty \otimes F^\infty \to F^\infty$ совпадает с умножением на G, пространство F^∞ является топологической группой. □

8. Гипотеза и основные подходы

Пусть G - стягиваемая топологическая группа, являющаяся геометрической реализацией симплициального множества (откуда $G \in \mathrm{Top}_\Delta$ по предложению 2.3) и $\mathbb{R}^\delta \to G$ - вложение топологических групп.

Рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^\delta \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d, dotted] \\
\mathbb{R} \arrow[r, dotted] & G^r
\end{tikzcd}$$

и ее пушаут G^r в категории топологических групп.

***Гипотеза* 8.1.** *Гомологии G^r с коэффициентами в $\mathbb{F}_p$ тривиальны для всех простых p: $H_n(G^r, \mathbb{F}_p) \cong H_n(pt, \mathbb{F}_p)$ для $\forall n \geq 1$.*

В этом разделе мы обсудим три подхода к этой гипотезе.

8.1. 1 подход: модельные категории

В разделе 3 мы выяснили, что категория топологических групп является модельной. Одним из важнейших свойств модельных категорий является *левая собственность*

Определение 8.1. Модельная категория $\mathscr{C}$ называется *левой собственной*, если пушаут слабой эквивалентности вдоль корасслоения является слабой эквивалентностью.

Нам будет важен следующий важный факт:

***Теорема* 8.2.** *В левой собственной категории пушаут вдоль корасслоения является гомотопическим пушаутом.*

Доказательство. Доказательство может быть найдено в [18, Proposition 4.4]. $\square$

Пусть $\mathbb{R}^\delta \to G$ является корасслоением в модельной категории TGrp.

***Теорема* 8.3.** *Модельная категория* TGrp *является левой собственной.*

Доказательство. Доказательство в случае топологических моноидов содержится в [15]. $\square$

Таким образом, пушаут G^r является гомотопическим пушаутом в модельной категории TGrp.

Теперь, применим функтор классифицирующего пространства к диаграмме

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R}^\delta \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d, dotted] \\ \mathbb{R} \arrow[r, dotted] & G^r \end{tikzcd}$$

По предложению 3.2 получаем гомотопический пушаут (с точностью до гомотопической эквивалентности) в категории Top

$$\begin{tikzcd} B\mathbb{R}^\delta \arrow[r] \arrow[d] & BG \arrow[d, dotted] \\ B\mathbb{R} \arrow[r, dotted] & BG^r \end{tikzcd}$$

Тогда, по теореме 3.7 имеем точную последовательность

$$\cdots \to H_{n+1}(BG^r, \mathbb{F}_p) \to H_n(B\mathbb{R}^\delta, \mathbb{F}_p) \to H_n(B\mathbb{R}, \mathbb{F}_p) \oplus H_n(BG, \mathbb{F}_p) \to H_n(BG^r, \mathbb{F}_p) \to \dots$$

откуда $H_n(BG^r, \mathbb{F}_p) \cong H_n(pt, \mathbb{F}_p)$ по лемме 6.1.

Тогда $H_n(G^r, \mathbb{F}_p) \cong H_n(pt, \mathbb{F}_p)$, доказательство чего следует из рассуждения в 8.2.

8.2. 2 подход: рациональная теория гомотопий

Так как пространство G стягиваемо, группы $\pi_i(G)$ тривиальны для $\forall i \geq 0$, таким образом $\pi_*(G)$ - рациональные векторные пространства.

***Предложение* 8.1.** *Следующие утверждения эквивалентны:*

1 Группы $H_n(G^r, \mathbb{Z})$ являются $\mathbb{Q}$-векторными пространствами.

2 Гипотеза 8.1 верна.

Доказательство. Это тривиально следует из точной последовательности $0 \to \mathbb{Z} \xrightarrow{\cdot p} \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to 0$ и ассоциированной с ней точной последовательностью гомологий

$$0 \to H_*(G^r, \mathbb{Z}) \to H_*(G^r, \mathbb{Z}) \to H_*(G^r, \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}) \to 0$$

$\square$

Таким обазом, достаточно доказать, что $H_*(G^r, \mathbb{Z}) \in Vect_{\mathbb{Q}}$. Один из возможных походов дает следующее предложение.

***Предложение* 8.2.** *Пусть G - связная топологическая группа. Пусть, также, отображения $f_n : G \to G$, $g \mapsto g^n$ являются слабыми эквивалентностями. Тогда $H_*(G, \mathbb{F}_p) \cong H_*(pt, \mathbb{F}_p)$.*

Сформулируем очевидную лемму без доказательства.

***Лемма* 8.1.** *Умножение в топологической группе G индуцирует сложение в высших гомотопических группах.*

Доказательство. 8.2
Отображения f_n индуциуют умножение на n в гомотопических группах и, так как f_n - слабые эквивалентности, умножение на n в $\pi_*(G)$ - изоморфизм. Следовательно, группы $\pi_n(G)$ являются $\mathbb{Q}$-векторными пространствами.

Рассмотрим расслоение $G \to EG \to BG$ (замечание 2.7) и длинную точную последовательность гомотопических групп (теорема 2.11), ассоциированную с данным расслоением:

$$\dots \to \pi_{n+1}(BG) \to \pi_n(G) \to \pi_n(EG) \to \pi_n(BG) \to \pi_{n-1}(G) \to \dots$$

Так как EG стягиваемо, получаем изоморфизм $\pi_n(BG) \cong \pi_{n-1}(G)$ и, сооответственно, группы $\pi_*(BG)$ являются $\mathbb{Q}$-векторными пространствами. Из той же длинной точной последовательности получаем $\pi_1(BG) \cong \pi_0(G) = \{e\}$, следовательно, пространство BG односвязно. Из теоремы Серра (ссылка) группы $H_*(BG, \mathbb{Z})$ являются $\mathbb{Q}$-векторными пространствами, тогда $H_*(BG, \mathbb{F}_p) \cong H_*(pt, \mathbb{F}_p)$.

Наконец, рассмотрим спектральную последовательность 5.1, ассоциированную с расслоением $G \to EG \to BG$:

$$E^2_{n,m} = H_n(BG, H_m(G, \mathbb{F}_p)) \Rightarrow_{m+n} (EG, \mathbb{F}_p)$$

Так как пространство BG рационально, спектральная последовательность сконцентрирована при $n = 0$.

3	0	0	0	0	$\dots$
2	0	0	0	0	$\dots$
1	0	0	0	0	$\dots$
0	$H_0(G, \mathbb{F}_p)$	$H_1(G, \mathbb{F}_p)$	$H_2(G, \mathbb{F}_p)$	$H_3(G, \mathbb{F}_p)$	$\dots$
	0	1	2	3	$\dots$

Тогда, спектральная последовательность обрывается на втором листе и сходится к $H_*(G, \mathbb{F}_p)$. Итого, $H_*(G, \mathbb{F}_p) \Leftarrow E^2_{n,m} \Rightarrow H_*(EG, \mathbb{F}_p) \cong H_*(pt, \mathbb{F}_p)$, что и требовалось доказать. □

Таким образом, мы сформулировали достаточное условие для того, чтобы гипотеза 8.1 была выполнена: достаточно доказать, что f_n являются слабыми эквивалентностями.

8.3. 3 подход: пространства F^i

В данной части мы докажем основной результат диплома.

***Теорема* 8.4.** *Пусть гомоморфизм $\mathbb{R}^\delta \to G$ является нормальным. Тогда гипотеза 8.1 выполнена.*

Прежде чем доказывать эту теорему, мы докажем более слабое утверждение, а именно

***Теорема* 8.5.** *Пусть гомоморфизм $\mathbb{R}^\delta \to G$ является центральным. Тогда гипотеза 8.1 выполнена.*

Доказательство. В случае центрального расширения топологическую группу G^r можно описать явно.

Рассмотрим диагональное отображение $\Delta : \mathbb{R}^\delta \hookrightarrow \mathbb{R} \times G$ по правилу $\Delta(r) := (r, r^{-1})$. Так как $\mathbb{R}^\delta \to G$ центрально, подгруппа $\Delta(\mathbb{R}^\delta)$ нормальна в $\mathbb{R} \times G$. Покажем, что $G^r = \mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta$. Существуют естественные отображения $G \to \mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta$ и $\mathbb{R} \to \mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta$. Тогда, пусть имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^\delta \arrow[r] \arrow[d, "Id"] & G \arrow[d] \arrow[ddr, "f"] & \\
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[drr, "f'"] & \mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta & \\
 & & M
\end{tikzcd}$$

Тогда, отображение $h : \mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta \to M$ построим по правилу $h(r,g) := f'(r) \cdot f(g)$. Корректность отображения очевидна.

Рассмотрим спектральную последовательность Картана-Лерэя для фактор-пространства $\mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta$. Очевидно, что $\mathbb{R}^\delta$ свободно действует на $\mathbb{R} \times G$. Так как $\mathbb{R}^\delta$ является дискретной подгруппой G, существует окрестность U единичного элемента $e \in G$, такая что $V' \cap \mathbb{R}^\delta = e$. Выберем симметричскую окрестность $e \in V \subset V'$, и для произвольной точки $(r,g) \in \mathbb{R} \times G$ определим ее окрестность $U := \mathbb{R} \times gV$. Пусть существует $s \in \mathbb{R}^\delta$, такое что $s.U \cap U \neq \emptyset$. Тогда $(s^{-1}g)V \cap gV \neq \emptyset$, следовательно существуют $v_1, v_2 \in V$, такие что $s^{-1}gv_1 = gv_2$. Тогда $v_1 v_2^{-1} = g^{-1}sg \in \mathbb{R}^\delta$, но, так как $V \cap \mathbb{R}^\delta = \{e\}$, получаем $g^{-1}sg = e$, откуда $s = 0$.

Мы показали, что действие группы $\mathbb{R}^\delta$ на множестве $\mathbb{R} \times G$ является свободным и собственным, следовательно, справедливо рассматривать спектральную последовательность

$$E^2_{n,m} = H_n(\mathbb{R}^\delta, H_m(\mathbb{R} \times G, \mathbb{F}_p)) \Rightarrow H_{n+m}(G^r, \mathbb{F}_p)$$

Группа $\mathbb{R} \times G$ стягиваема, следовательно $H_*(\mathbb{R}^\delta, H_*(\mathbb{R} \times G, \mathbb{F}_p)) \cong H_*(\mathbb{R}^\delta, \mathbb{F}_p) \cong H_*(B\mathbb{R}^\delta, \mathbb{F}_p)$. По 6.1 получаем $H_*(B\mathbb{R}^\delta, \mathbb{F}_p) \cong H_*(pt, \mathbb{F}_p)$. □

Теперь перейдем к доказательству 8.4.

***Предложение* 8.3.** *Топологическая группа F^∞, определенная в 7.2, равна G^r.*

Доказательство. Предположим, что существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^\delta \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] \arrow[ddr, "\phi"] & \\
\mathbb{R} \arrow[r] \arrow[drr, "\psi"] & F^\infty & \\
 & & M
\end{tikzcd}$$

Чтобы построить отображение $F^\infty \to M$ определим морфизмы $F^i \to M$ и перейдем к копределу.

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^\delta \overset{i}{\bowtie} G \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
\mathbb{R} \overset{i}{\bowtie} G \arrow[r] \arrow[dr] & F^i & \\
& M^{\otimes(2i+1)} \arrow[r] & M
\end{tikzcd}$$

Эта диаграмма коммутативна, таким образом имеем морфизм $F^i \to M$. □

Из предыдущего предложения следует $G^r = \varinjlim(F^i)$, поэтому резонно задать вопрос, когда $\varinjlim(F^i) \cong F^1$.

Отметим важное замечание: при работе с пространством F^1 умножение $-\otimes-$ можно заменить на $-\times-$. Действительно, в построении пространства F^1 участвуют группы, имеющие вид $X \otimes G$, где пространство X хаусдорфово локально компактно. Но тогда по предложению 2.7 имеем $X \otimes G = X \times G$.

Лемма 8.2. *Пусть вложение $\mathbb{R}^\delta \to G$ нормально.*
Тогда $\varinjlim(F^i)$ гомеоморфно F^1.

Доказательство. Рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^\delta \otimes G \otimes \mathbb{R}^\delta \otimes G \arrow[rrr] \arrow[ddd] & & & G \arrow[ddd] \\
& \mathbb{R}^\delta \times G \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] \arrow[ur, leftrightarrow] & \\
& \mathbb{R} \times G \arrow[r] \arrow[dl, hook] & F^1 \arrow[dr] & \\
\mathbb{R} \otimes G \otimes \mathbb{R} \otimes G \arrow[rrr] & & & F^2
\end{tikzcd}$$

Нужно доказать, что отображение умножения $\mathbb{R} \otimes G \otimes \mathbb{R} \otimes G \to F^1$ непрерывно. Покажем, что отображение умножения $\mathbb{R} \times G \times \mathbb{R} \times G \to F^1$ непрерывно, и так как $\mathbb{R} \otimes G \otimes \mathbb{R} \otimes G$ является тем же множеством с более тонкой топологией, чем на $\mathbb{R} \times G \times \mathbb{R} \times G$, получим непрерывное отображение $F^2 \to F^1$.

Подгруппа $\mathbb{R}^\delta \hookrightarrow G$ в F^2 наследует новую топологию σ, так что $\mathbb{R} \preccurlyeq \mathbb{R}^\sigma \preccurlyeq \mathbb{R}^\delta$.

Умножим пушаут $\mathbb{R} \otimes G \leftarrow \mathbb{R}^\delta \otimes G \to G$ на $\mathbb{R}$ и получим по 2.1 пушаут

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R} \otimes \mathbb{R}^\delta \otimes G \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \otimes G \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
\mathbb{R} \otimes \mathbb{R} \otimes G \arrow[r] \arrow[drr] & \mathbb{R} \otimes F^1 \arrow[dr] & \\
& & F^1
\end{tikzcd}$$

то есть отображение умножения $\mathbb{R} \otimes F^1 \to F^1$ непрерывно.

Рассмотрим отображение $\lambda : F^1 \otimes \mathbb{R} \to F^2$, $\lambda(g,r) = grg^{-1}$. Так как вложение $\mathbb{R}^\delta \hookrightarrow G$ нормально, $\mathrm{Im}\lambda = \mathbb{R}^\sigma$. Разложим отображение λ в композицию $F^1 \otimes \mathbb{R} \to \mathrm{Im}\lambda \to F^2$ и получим отображение $F^1 \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}^\sigma$, а следовательно и отображение $\lambda : F^1 \otimes \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, такое что $\lambda(g,r) = grg^{-1}$.

Теперь легко доказать основное утверждение. Разложим отображение умножения $\mathbb{R} \otimes G \otimes \mathbb{R} \otimes G \to F^1$ в композицию

$$\mathbb{R}\otimes G\otimes\mathbb{R}\otimes G \to \mathbb{R}\otimes G\otimes\mathbb{R}\otimes G \xrightarrow{Id} \mathbb{R}\otimes F^1\otimes\mathbb{R}\otimes F^1 \xrightarrow{Id\otimes\lambda\otimes Id} \mathbb{R}\otimes\mathbb{R}\otimes F^1 \to F^1$$

где первое отображение устроено как $(r_1, g_1, r_2, g_2) \mapsto (r_1, g_1, r_2, g_1 g_2)$. Все отображения в этой композиции непрерывны. $\square$

***Предложение* 8.4.** *Пространство F^1 гомеоморфно пространству $\mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta$.*

Доказательство. Существуют естественные отображения $G \to \mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta$ и $\mathbb{R} \times G \to \mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta$

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^\delta \times G \arrow[r] \arrow[d] & G \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
\mathbb{R} \times G \arrow[r] \arrow[drr] & F^1 \arrow[dr, dotted] & \\
& & \mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta
\end{tikzcd}$$

Таким образом имеем отображение $F^1 \to \mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta$.

С другой стороны, $\mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta$ является пушаутом диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^\delta \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \times G \arrow[d, dotted] \\
\{pt\} \arrow[r, dotted] & \mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta
\end{tikzcd}$$

Тогда из диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^\delta \arrow[r] \arrow[d] & \mathbb{R} \times G \arrow[d] \arrow[ddr] & \\
\{pt\} \arrow[r] \arrow[drr] & \mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta \arrow[dr, dotted] & \\
& & F^1
\end{tikzcd}$$

Получаем непрерывное отображение $\mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta \to F^1$.

Из конструкции очевидно, что композиции $\mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta \to F^1 \to \mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta$ и $F^1 \to \mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta \to F^1$ являются тождественныи отображениями. $\square$

Доказательство. 8.4

Пусть $\mathbb{R}^\delta \to G$ - нормальное расширение, тогда из 8.2 и 8.4 следует, что G^r гомеоморфно $\mathbb{R} \times G/\mathbb{R}^\delta$. Тогда из спектральной последовательности Картана-Лерэя следует $H_*(G^r, \mathbb{F}_p) \cong H_*(pt, \mathbb{F}_p)$. $\square$

9. Заключение

В заключении обозначим некоторые моменты. В дипломе представлены три подхода к основной гипотезе 8.1: через модельные категории, рациональную теорию гомотопий и пространства F^i. Эта гипотеза, насколько известно автору диплома, не появлялась в литературе ранее и была сообщена автору научным руководителем. Возможные подходы также были сообщены автору научным руководителем. Насколько известно автору, утверждения разделов 7 и 8 являются новыми. В подходе 1 доказывается гипотеза в случае, когда $\mathbb{R}^\delta \to G$ является корасслоением. В подходе 2 мы переформулируем гипотезу в терминах рациональной гомотопий. В подходе 3 мы доказываем гипотезу в случае нормального вложения $\mathbb{R}^\delta \to G$.

Список литературы

1. *Hatcher, Allen*, Algebraic topology, Cambridge University Press, 2002.
2. *Whitehead, George W.*, Elements of Homotopy Theory, Graduate Texts in Mathematics, 1978.
3. *Mac Lane, Saunders*, Categories for the Working Mathematician, Graduate Texts in Mathematics. 5, 1998.
4. *Graeme Segal*, Classifying spaces and spectral sequences, Publications Mathématiques de l'IHÉS, 34, 1968, p. 105-112.
5. /nlab/show/convenient category of topological spaces.
6. *Rainer M. Vogt*, Convenient categories of topological spaces for homotopy theory, Archiv der Mathematik, 1971, Vol. 22, 545–555.
7. *Philip Hirschhorn*, The Quillen model category of topological spaces, 2015, (arXiv:1508.01942).
8. /nlab/show/transferred model structure.
9. *Arkowitz, Martin*, Introduction to Homotopy Theory, Springer-Verlag New York, 2011.
10. *Brown, K. S.*, Cohomology of Groups, Springer-Verlag, 1982.
11. *John McCleary*, A User's Guide to Spectral Sequences, Vassar College, New York, 2001.
12. *Allen Hatcher*, Spectral Sequences in Algebraic Topology.
13. *Paul Goerss, Rick Jardine*, Simplicial homotopy theory, Modern Birkhäuser Classics, 2009.
14. *J. Milnor*, On the homology of Lie groups made discrete, Commentarii Mathematici Helvetici, Vol. 58, 72-85, 1983.
15. *M. A. Batanin, C. Berger*, Homotopy theory for algebras over polynomial monads, Theory and Applications of Categories,Vol. 32, No. 6, 2017, pp. 148–253.
16. *Tammo Tom Dieck*, Algebraic Topology, Ems Textbooks in Mathematics (Book 8), American Mathematical Society, 2008.
17. *R.M. Vogt*, Homotopy homomorphisms and the classifying space functor, Poznan 2011.
18. /nlab/show/proper model category.
19. mathoverflow.net/questions/322676/model-structure-on-the-category-of-topological-groups.